Πρόταση

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $y\in A''$. Τότε $\overline{\lim} f(x) = \underline{\lim} f(x)$ αν-ν το $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\overline{\lim} f(x) = \underline{\lim} f(x) = \lim f(x)$$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $\overline{\lim} f(x) = \underline{\lim} f(x) = L$

Θεωρούμε $\varepsilon>0$.

• $\boxed{\text{Έστω } L\in\mathbb{R}}$

Εφόσον $\overline{\lim} f(x) \le L$, από Πρόταση της σελίδας 17, έχουμε για $\varepsilon>0$ $(\exists \delta_1>0): x\in B_0(y,\delta_1)\cap A \Rightarrow f(x)\le L+\varepsilon$.

Επιπλέον, εφόσον $\underline{\lim} f(x)\ge L$, από Πρόταση της σελ. 17, έχουμε για $\varepsilon>0$. $(\exists\delta_2>0): x\in B_0(y,\delta_2)\cap A \Rightarrow f(x)\geq L-\varepsilon$.

Συνεπώς, επιλέγω $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

Άρα $x\in B_0(y,\delta_0)\cap A \Rightarrow L-\varepsilon\le f(x)\le L+\varepsilon$

Τα παραπάνω ισχύουν για τυχόν $\varepsilon>0$.

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0): x\in B_0(y,\delta_0)\cap A \Rightarrow |f(x)-L|\le\varepsilon$

Δηλαδή, $\lim\limits_{x\to y} f(x)=L$

• $\boxed{\text{Έστω } L=-\infty}$

Εφόσον, $\lim f(x)=-\infty$, θα έχουμε ότι $\overline{\lim} f(x) \le -\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon = \mu \in\mathbb{R}$

Επομένως, από Πρόταση σελ. 17, για $\varepsilon>0$ $(\exists\delta>0)$ τ.ω.

$x\in B_0(y,\delta)\cap A \Rightarrow f(x)\le -\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon+\varepsilon \le -\frac{1}{\varepsilon}$

Τα παραπάνω ισχύουν για τυχόν $\varepsilon>0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to y} f(x) = -\infty = \overline{\lim} f(x) = \underline{\lim} f(x)$

• $\boxed{\text{Έστω } L = +\infty}$

Εφόσον, $\underline{\lim} f(x) = +\infty$ έπεται ότι για τυχόν $\varepsilon > 0$

$\underline{\lim} f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon = \ell \in \mathbb{R}$

Από Πρόταση σελ. 17, έχουμε ότι $(\exists \delta > 0)$:

$x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$

Άρα $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq 1/\varepsilon$

Δηλαδή, $\lim\limits_{x\to y} f(x) = +\infty = \underline{\lim} f(x) = \overline{\lim} f(x)$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $\lim\limits_{x\to y} f(x) = L$

• $\boxed{\text{Εάν } L \in \mathbb{R}}$

Τότε $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Συνεπώς, $\{f(x) - L < \varepsilon$ και $f(x) - L \geq -\varepsilon\} \Rightarrow$
$\{f(x) \leq \ell + \varepsilon$ και $f(x) \geq L - \varepsilon\}$

Οπότε εφόσον $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ $x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq L + \varepsilon$,
από Πρόταση σελ. 17, έχουμε ότι $\overline{\lim} f(x) \leq L$ και
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq L - \varepsilon$, άρα $\underline{\lim} f(x) \geq L$

Όμως $L \leq \underline{\lim} f(x) \leq \overline{\lim} f(x) \leq L$

Άρα $\underline{\lim} f(x) = L = \overline{\lim} f(x) = \lim\limits_{x\to y} f(x)$

• $\boxed{\text{Έστω } L = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to y} f(x) = +\infty$. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$
$> \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon$

Αν θέσω $\frac{1}{\varepsilon} = \ell_1$, τότε από Πρόταση σελ. 17, έχουμε $\underline{\lim} f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Εφόσον, τα παραπάνω ισχύουν $(\forall \varepsilon > 0)$ παίρνοντας $\varepsilon \to 0$, έχουμε $\underline{\lim} f(x) = +\infty$ και εφόσον $\underline{\lim} f(x) \leq \overline{\lim} f(x)$, έπεται ότι $\overline{\lim} f(x) = +\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x \to y} f(x) = \underline{\lim} f(x) = \overline{\lim} f(x) = +\infty$

- $\boxed{\text{Έστω } L = -\infty}$

Τότε, εφόσον $\lim\limits_{x \to y} f(x) = -\infty$, έχουμε $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$:

$x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq -\frac{L}{\varepsilon} < -\frac{L}{\varepsilon} + \varepsilon$.

Θεωρώ $-\frac{L}{\varepsilon} = \ell_1$, από Πρόταση σελ. 17, έχω $\overline{\lim} f(x) \leq -\frac{L}{\varepsilon}$.

Εφόσον, τα παραπάνω ισχύουν $(\forall \varepsilon > 0)$, παίρνοντας $\varepsilon \to 0$, έχουμε $\overline{\lim} f(x) = -\infty$ και εφόσον $\underline{\lim} f(x) \leq \overline{\lim} f(x)$ έπεται ότι $\underline{\lim} f(x) = -\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x \to y} f(x) = \underline{\lim} f(x) = \overline{\lim} f(x) = -\infty$.

Πρόταση

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $y \in A''$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $A \setminus \{y\}$ τ.ω.:

$\lim x_n = y$ και $\lim f(x_n) = \overline{\lim} f(x)$

$\lim y_n = y$ και $\lim f(y_n) = \underline{\lim} f(x)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $L = \overline{\lim} f(x)$ τότε

• Έστω $\boxed{L \in \mathbb{R}}$

Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, δηλαδή L δεν είναι σημείο συσσώρευσης.

Άρα $\exists\, \varepsilon > 0$ και $\delta_1 > 0$ τ.ω. $x \in B_0(y, \delta_1) \Rightarrow$
$B_0(L, \varepsilon_0) \cap \{f(x) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A\} = \emptyset$, δηλαδή
$f(x) - L > \varepsilon_0$ ή $f(x) - L < -\varepsilon_0$ ή
$x \in B_0(y, \delta_1) \Rightarrow f(x) > L + \varepsilon_0$ ή $\boxed{f(x) < L - \varepsilon_0}$ $(*)$

Επιπλέον εφόσον $\overline{\lim} f(x) \le L$, οπότε από ΠΡΟΤΑΣΗ 4, σελ. 17
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \le L + \varepsilon$

Οπότε για $\varepsilon = \varepsilon_0$ θα $\exists\, \varepsilon_2 > 0$ τ.ω. $x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \Rightarrow$
$\boxed{f(x) \le L + \varepsilon_0}$ $(*_1)$

Επιλέγοντας $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε ότι για
$x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) < L - \varepsilon_0$.

Εφόσον, κάθε $x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) < L - \varepsilon_0$
έπεται $\sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \le L - \varepsilon_0$

$\inf_{\delta > 0} \{\sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\}\} \le L - \varepsilon_0$

δηλαδή $\overline{\lim} f(x) \le L - \varepsilon_0 \Rightarrow L \le L - \varepsilon_0$ όπου $\varepsilon > 0$, Άτοπο

Άρα, L είναι σ.σ. δηλαδή $\exists (x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ με
$x_n \to y$ τ.ω. $\lim f(x_n) = \overline{\lim} f(x)$

• Έστω $\boxed{L = +\infty}$

Έστω ότι L δεν είναι σ.σ. Τότε $\exists \varepsilon > 0$ κ' $\delta > 0$ τ.ω.
$x \in B_0(y, \delta) \cap A$ να ισχύει $\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \cap B_0(L, \varepsilon) = \emptyset$
αλλά $L = +\infty$, άρα $B(L, \varepsilon) = \{z : z > 1/\varepsilon\}$

Συνεπώς $\exists \varepsilon > 0$ κ' $\delta > 0$ τ.ω. $x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow$
$f(x) \le 1/\varepsilon$

Τα παραπάνω ισχύουν $\forall x \in B_0(y, \delta) \cap A$ άρα
$\sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \le 1/\varepsilon$.

$\inf_{\delta > 0} \{\sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\}\} \le 1/\varepsilon$, δηλαδή

$L = \overline{\lim} f(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}$ Άτοπο διότι $L = +\infty$. Άρα L σ.σ.

- Έστω $\boxed{L = -\infty}$

Λόγω ότι $\underline{\lim} f(x) \leq \overline{\lim} f(x) = -\infty$

Άρα, έπεται ότι $\overline{\lim} f(x) = \underline{\lim} f(x) = -\infty$.

Από προηγούμενη ΠΡΟΤΑΣΗ σελ. 19, το $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to y} f(x) = \underline{\lim} f(x) = \overline{\lim} f(x)$.

Αλλά από τον ακολουθιακό ορισμό του ορίου έχουμε ότι $\forall (x_n) \subseteq A\setminus\{y\}$ με $x_n \to y$ ισχύει

$$\lim_{x\to y} f(x) = \lim_{x\to y} f(x_n) = \overline{\lim} f(x) = \underline{\lim} f(x)$$

- Για το $\underline{\lim} f(x)$ λαμβάνουμε υπόψην ότι

$$\underline{\lim} f(x) = -\overline{\lim}(-f(x))$$

Σύμφωνα, με τα προηγούμενα, $\exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A\setminus\{y\}$ με

$\lim z_n = y$ και $\lim\limits_{x\to y} (f(z_n)) = \overline{\lim}(-f(x))$ ή

$$-\lim f(z_n) = \overline{\lim}(-f(x))$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$. Να βρείτε το $\overline{\lim} f(x)$ και $\underline{\lim} f(x)$ στα σημεία $0, +\infty$.

• Στο σημείο 0

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$ ως μηδενική επί φραγμένη.

Οπότε $\overline{\lim_{x\to 0}} f(x) = \underline{\lim_{x\to 0}} f(x) = 0$

• Στο $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{1/x} = \lim_{n\to 0} \frac{\sin n}{n} = 1$$

Άρα $\overline{\lim_{x\to\infty}} f(x) = \underline{\lim_{x\to\infty}} f(x) = 1$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $y \in A''$ ισχύει

$\overline{\lim} f(x) = \sup \Gamma_y$ και $\underline{\lim} f(x) = \inf \Gamma_y$ όπου

$\Gamma_y = \{x \in \mathbb{R}^* : \exists (x_n) \subseteq A\setminus\{y\}, \lim x_n = y, \lim f(x_n) = x\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $L = \overline{\lim} f(x)$, από Πρόταση σελ. 21, έχουμε ότι $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A\setminus\{y\}$ με $\lim x_n = y$ και $\lim f(x_n) = L$. Άρα $L \in \Gamma_y$

Συνεπώς, $L \leq \sup \Gamma_y$

Έστω ότι $L < \sup \Gamma_y$. Τότε $\exists \mu \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τ.ω.

$$L < \mu < \sup \Gamma_y \text{ και } \overline{\lim} f(x) = L < \mu - \varepsilon$$

Άρα, από Πρόταση σελ. 17, $(\exists \delta > 0)$ τ.ω. $x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq \mu - \varepsilon + \varepsilon = \mu$. (1)

Επιπλέον, επειδή $\mu < \sup \Gamma_y$ έπεται ότι $\exists$ τουλάχιστον ένα στοιχείο του Γ_y μεγαλύτερο του μ.
Άρα $\exists (x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ με $\lim x_n = y$ με $\boxed{\mu < \lim f(x_n)}$ (*)

Όμως, εφόσον $(x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ και $x_n \to y$ για το δ που ορίσαμε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $0 < |x_n - y| < \delta$ $\forall n \geq n_0$
Δηλαδή, $x_n \in B_0(y, \delta) \cap A$ $\forall n \geq n_0$.
Συνεπώς, από (1) έχουμε $f(x_n) \leq \mu$ $\forall n \geq n_0$ οπότε και $\lim f(x_n) \leq \mu$ Άτοπο λόγω της (*) και από την υπόθεση καθώς $L < \sup \Gamma_y$

Όμοια, αποδεικνύεται και ότι $\underline{\lim} f(x) = \inf \Gamma_y$.

ΑΣΚΗΣΗ
Έστω $f : \underbrace{[0,1]}_{=A} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{J} \cap [0,1] \end{cases}$
($\mathbb{J}$ άρρητοι)

Εάν $y \in [0,1]$ να βρείτε το $\underline{\lim} f(x)$ κ' $\overline{\lim} f(x)$.

α' τρόπος
Έστω $y \in [0,1]$ $\overline{\lim} f(x) = \inf\limits_{\delta > 0} \sup \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\}$

Για τυχόν $\delta > 0$ στο σύνολο $B_0(y, \delta) \cap [0,1]$ υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{Q}$ και του $\mathbb{J}$. Οπότε $\sup \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap [0,1]\} = 1$
Αυτό ισχύει για $\delta > 0$ τυχόν, οπότε

$$\overline{\lim} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} = 1$$

Όμοια για τυχαίο $\delta > 0$, εφόσον $B_0(y, \delta) \cap A$ υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{Q}$ και του $\mathbb{J}$ τ.ω.

$$\inf \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} = 0.$$

Αφού ισχύει για τυχόν $\delta>0$ έχουμε

$$\underline{\lim} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf\{f(x) : x \in B_0(y,\delta) \cap A\} = 0$$

β' τρόπος

$$\underline{\lim} f(x) = \inf\{ x \in \mathbb{R}^* : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A\setminus\{y\} : x_n \to y, \lim f(x_n) = x\}$$

Θεωρούμε μια ακολουθία $\{x_n\} \subseteq [0,1]\setminus\{y\}$ με $\lim x_n = y$. Τότε η ακολουθία αυτή θα έχει όρους ρητούς και άρρητους αριθμούς. Κάποιοι από τους δύο θα είναι άπειροι όροι. Επομένως, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$\mathbb{Q}$ άπειροι όροι.

Θεωρούμε x_{k_n} υπακολουθία της x_n, η οποία αποτελείται από τους ρητούς. Και εφόσον $x_n \to y$ έπεται ότι $x_{k_n} \to y$. Επίσης, ισχύει ότι $f(x_{k_n}) = 1$. Άρα $\lim f(x_{k_n}) = 1$

2η περίπτωση

$\mathbb{J}$ άπειροι όροι.

Θεωρούμε x_{λ_n} υπακολουθία της x_n, η οποία αποτελείται από τους άρρητους. Και εφόσον $x_n \to y$, έπεται ότι $x_{\lambda_n} \to y$ και άρα $f(x_{\lambda_n}) = 0$.

Συνεπώς, $\forall (x_n) \subseteq [0,1]\setminus\{y\}$ με $x_n \to y$ και (x_{μ_n}) υπακολουθία της (x_n) ισχύει $\lim f(x_{\mu_n}) = 1$ ή 0.

Άρα $\underline{\lim} f(x) = \inf \Gamma_y = 0$ κ' $\overline{\lim} f(x) = \sup \Gamma_y = 1$